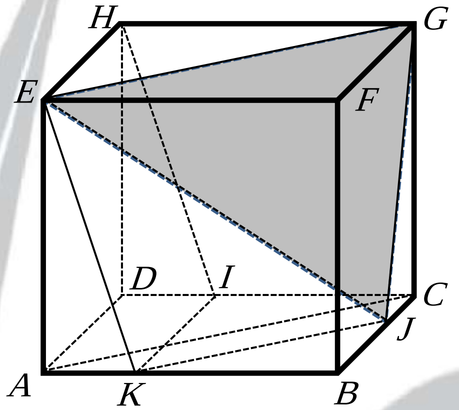
$\frac{6}{38}$ **لنتأمّل المكعّب** $ABCDEFGH$ ،

- **النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة:** $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$
- **النقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة:** $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

أثبت أنّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)



الحل:

وجها المكعب العلوي و السفلي متوازيان ويقطعهما المستوي (EGJ)

فالفصلان المشتركان هما مستقيمان متوازيان،

أي $(EG)\parallel(KJ)$

و بما أن $(EG)\parallel(AC)$

لأن $[AC],[EG]$ قطران متقابلان في وجهين متقابلين للمكعب،

إذاً: $(AC)\parallel(KJ)$

فحسب نظرية تالس نجد: $\frac{AK}{AB}=\frac{JC}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow AK=\frac{1}{4}AB$

المثلثان القائمان EAK و HDI طبوقان

لأن فيهما $HI=EA$ و $AK=DE=\frac{1}{4}AB$

ومن تطابقهما نجد أن $EK=HI$

فالرباعي $EKIH$ متوازي أضلاع

(ويمكن الإثبات أنّه مستطيل ولكن لا داعي لذلك)

ونستنتج أن $(HI)\parallel(EK)$

وبما أنّ المستقيم (HI) يوازي المستقيم (EK) المحتوى في المستوي (EGJ)

فنستنتج أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).

طريقة ثانية للحل:

لنتخذ معلماً $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

فتكون إحداثيات النقاط : G,E,J,I,H

في هذا المعلم هي: $H(0,1,1),I\left(\frac{1}{4},1,0\right)$

$J\left(1,\frac{3}{4},0\right),E(0,0,1),G(1,1,1)$

لنبحث فيما إذا كان من الممكن كتابة أحد الأشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HI}$ بدلالة الشعاعين الآخرين (كعبارة خطية)

من أجل ذلك نفتش عن عددين حقيقيين x,y يحققان:

$$\overrightarrow{HI}=x\cdot\overrightarrow{EG}+y\cdot\overrightarrow{EJ}$$

$$\left(\frac{1}{4},0,-1\right)=x(1,1,0)+y\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$$

$x+y=\frac{1}{4}$ ①

$x+\frac{3}{4}y=0$ ②

$-y=-1\Rightarrow\boxed{y=1}$ ③

نعوض من ③ في ① فنجد $\boxed{x=\frac{-3}{4}}$

نعوض النتائج في ② للتحقق فنجد: $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$ محققة.

فالأشعة الثلاثة: $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HI}$ مرتبطة خطياً فهي في مستوٍ واحد ، و نستنتج أن الشعاع $\overrightarrow{HI}$ يوازي مستوي الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$

فالمستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

$\frac{16}{42}$ **جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $B(0,5,-1),A(2,-1,3)$**

الحل: بما أن النقطة C من محور الفواصل فهي من الشكل $C(x,0,0)$ حسب الفرض نكتب: $AC=BC$

$$\sqrt{(x-2)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{x^2+(-5)^2+1^2}$$

نربع الطرفين: $(x-2)^2+10=x^2+26$

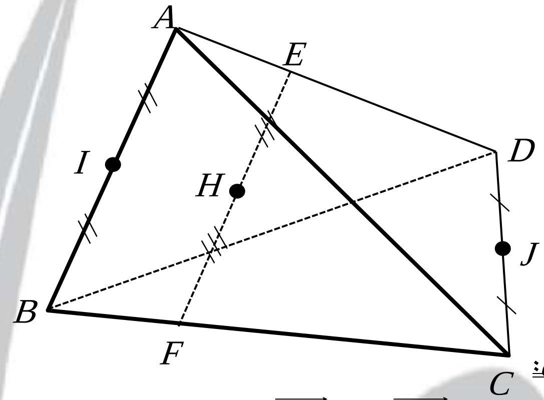
$$\cancel{x^2}-4x+4+10=\cancel{x^2}+26$$

$$-12=4x\Rightarrow x=-3$$

فالنقطة C هي : $C(-3,0,0)$

$\frac{9}{40}$ **$A B C D$ رباعي وجوه a عدد حقيقي J , I هما على الترتيب منتصفا : $[A B],[C D]$. F , E نقطتان تحققان العلاقتين $\overrightarrow{AE}=a\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF}=a\cdot\overrightarrow{BC}$ وأخيراً H هي منتصف $[E F]$**

أثبت أن I , J , H تقع على استقامة واحدة.



الحل:

العلاقة المفروضة $\overrightarrow{AE}=a\cdot\overrightarrow{AD}$ تكتب بالشكل:

$$-\overrightarrow{EA}=a\cdot\left(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EA}\right)\Rightarrow\overrightarrow{EA}+a\cdot\overrightarrow{ED}-a\cdot\overrightarrow{EA}=\vec{0}$$

$$(1-a)\overrightarrow{EA}+a\cdot\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$

فالنقطة E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A\ ,\ 1-a),(D\ ,\ a)$$

و كذلك فالعلاقة المفروضة $\overrightarrow{BF}=a\cdot\overrightarrow{BC}$ تأخذ الشكل:

$$-\overrightarrow{FB}=a\cdot\left(\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{FB}\right)$$

$$(1-a)\overrightarrow{FB}+a\cdot\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$

فالنقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(B\ ,\ 1-a),(C\ ,\ a)$$

و بما أن H منتصف $[E F]$ ، إذاً H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين: $(F\ ,\ 1),(E\ ,\ 1)$

و حسب الخاصة التجميعية فالنقطة H مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه.

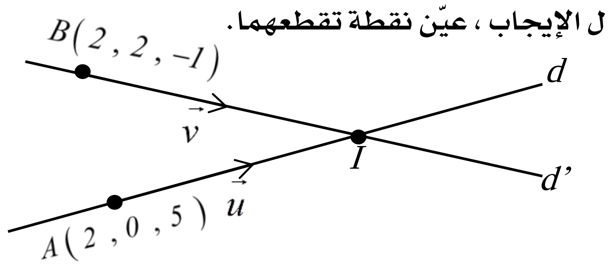
و بما أن I منتصف $[A B]$ ، إذاً I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين: $(A\ ,\ 1-a),(B\ ,\ 1-a)$

و بما أن J منتصف $[C D]$ ، إذاً J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين: $(C\ ,\ a),(D\ ,\ a)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين J , I فالنقاط H , J , I على استقامة واحدة.

$\frac{15}{42}$ **نتأمل في معلم $\left(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2\ ,\ 0\ ,\ 5)$ ، والموجه بالشعاع $\vec{u}(2\ ,\ 5\ ,\ -1)$ و المستقيم d' المار بالنقطة $B(2\ ,\ 2\ ,\ -1)$ ، و الموجه بالشعاع $\vec{v}(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$. هل d , d' متقاطعان؟ في حال الإيجاب ، عيّن نقطة تقطعهما.**

الحل:



الحل:

الشعاعان $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{2}{1}\neq\frac{5}{2}\neq\frac{-1}{1}$

فالمستقيمان d , d' غير متوازيين.

و يكونان متقاطعين إذا كانا في مستوٍ واحد ، ويتحقق ذلك إذا وجد عددان حقيقيان $\alpha\ ,\ \beta$ يحققان: $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$

$$(0,\ 2\ ,\ -6)=\alpha(2,\ 5\ ,\ -1)+\beta(1,\ 2\ ,1)$$

$$0=2\alpha+\beta \quad ①$$
$$2=5\alpha+2\beta \quad ②$$
$$-6=-\alpha+\beta \quad ③$$

بطرح ③ من ① نجد: $3\alpha=6 \Leftarrow \boxed{\alpha=2}$

نعوض في ① فنجد : $\boxed{\beta=-4}$ ثم نعوض في ② بغية التحقق:

✪ $\overrightarrow{AB}=2\cdot\vec{u}-4\cdot\vec{v} \Leftarrow$ محققة $-6=-2-4$

فالأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}$ مرتبطة خطياً فالمستقيمان d , d' في مستوٍ واحد و غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة $I(x\ ,\ y\ ,\ z)$ تحقق: $\overrightarrow{AI}=a\cdot\vec{u}$, $\overrightarrow{BI}=b\cdot\vec{v}$

و لدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}$$

أي أنّ: $\overrightarrow{AB}=a\cdot\vec{u}-b\cdot\vec{v}$

و بالمقارنة مع العلاقة ✪ نجد $\boxed{a=2}$, $\boxed{b=4}$

نعوض في العلاقة السابقة $\overrightarrow{AI}=a\cdot\vec{u}$ فنجد $\overrightarrow{AI}=2\cdot\vec{u}$

$$(x-2,\ y\ ,\ z-5)=2(2,5\ ,\ -1)$$

نقطة تقاطع d , d'

$$\left.\begin{array}{l} x-2=4\ \Rightarrow\ \ x=6 \\ \qquad\qquad\ \ y=10 \\ z-5=-2\Rightarrow\ z=3 \end{array}\right\}\Rightarrow I(6\ ,10\ ,\ 3)$$